Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

освітньо-кваліфікаційний рівень: ***магістр***

на тему ***«Субріманова метрика і нелінійна задача швидкодії»***

Виконала: студентка групи МП62 VI курсу
(другий магістерський рівень),
спеціальності 113
“Прикладна математика”
освітньо-професійної програми
“Прикладна математика”
Спорова О.О.
Керівник: доктор фіз.-мат. наук,
професор кафедри
прикладної математики
Ігнатович С.Ю.
Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук,
старший викладач кафедри
фундаментальної математики
Петров Є.В.

Харків — 2023 рік

Зміст

Вступ

У роботі розглядається зв'язок задач теорії керування (задачі швидкодії з обмеженням на керування) із задачами диференціальної геометрії (знаходження геодезичних кривих на гладкому многовиді з субрімановою метрикою).

Математична теорія керування є одним із найважливіших і найзатребуваніших розділів прикладної математики, оскільки надає необхідний формальний та аналітичний інструментарій для розуміння, моделювання та управління різноманітними динамічними системами. Вона є ключовим компонентом при розробці ефективних та стійких систем управління у різних галузях, від промислових процесів до робототехніки та автоматизації. Теорія керування надає методи для аналізу стабільності системи, що є критичним аспектом у розробці стійких та надійних систем управління, а також методи оптимального керування, які дозволяють оптимізувати продуктивність системи з огляду на різні критерії, такі як час, енерговитрати та інші.

Зв'язок теорії керування з диференціальною геометрією многовиду використовується для поліпшення аналізу та управління динамічними системами, що є особливо важливим у випадку складних систем та високорозмірних просторів станів системи. Диференціальна геометрія дозволяє розглядати простір станів динамічної системи як гладкий многовид. Це дуже актуально, коли система має складну структуру чи обмеження.

Диференціально-геометричний напрямок у теорії керування активно розвивається у теперішній час. Цей підхід є потужним інструментом, який дозволяє більш глибоко та ефективно вивчати та вирішувати завдання управління для складних динамічних систем. Наприклад, він застосовується для аналізу структури керованості системи та оцінки станів і траєкторій, які можуть бути досягнуті керуючим впливом. У контексті оптимального керування диференціально-геометричні методи можуть використовуватися для визначення оптимальних траєкторій та керуючих впливів з огляду на геометричні структури простору станів. Також, диференціально-геометричний підхід корисний при аналізі та побудові множин досяжності, що описують, які стани можуть бути досягнуті із заданих початкових станів при застосуванні керуючих впливів.

У цій роботі ілюструється зв'язок між оптимальними траєкторіями системи в сенсі задачі швидкодії та геодезичними кривими на гладкому многовиді з субрімановою метрикою на основі двох розглянутих прикладів. Дані приклади є системами на многовиді з метрикою Грушина і многовиді, що утворюється на основі групи Гейзенберга.

У цьому контексті також можна розглянути структуру і поведінку множин досяжності системи для різних керувань.

Розділ 1

Постановка задачі. Теоретичні факти та визначення

1.1.Ріманова метрика

Розглянемо гладкий многовид M розмірності n з заданою на ньому додатно визначеною квадратичною формою $G(.,.)$ для визначення скалярного добутку та норми, а отже і довжини кривих на цьому многовиді. Розглянемо криву на цьому многовиді. Нехай вона параметризується параметром $t \in [0,1]$. Тоді довжина вектора швидкості в точці $x(t)$ дорівнює $|\dot{x}(t)| = \sqrt{G(\dot{x}(t), \dot{x}(t))}$, а довжина кривої визначається як $l(t) = \int_0^1 |\dot{x}(t)|dt$.

Перейдемо до постановки задачі на мові векторних полів. Задамо ортонормальний базис $X_1(x)$, $X_2(x)$,..., $X_n(x)$ дотичної площини (замість квадратичної форми), щоб визначити норму вектора (скалярний добуток). $X_1(x)$, $X_2(x)$, ..., $X_n(x)$ – гладкі векторні поля. Тоді будь-який вектор дотичної площини до $x(t)$ розкладається по ортонормованому базису $X_1(x(t)), X_2(x(t)), ..., X_n(x(t))$:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} X_j(x(t))u_j(t),$$

причому

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} u_j^2(t)}.$$

Перейдемо до формулювання задачі на мові теорії керування системи. Нехай є m векторних гладких полів $X_1(x), X_2(x), ..., X_n(x)$, що є ненульовими та лінійно незалежними в будь-якій точці. Зручно розглядати $X_1(x), X_2(x), ..., X_n(x)$ як ортонормовані векторні поля.

Нехай x – стан системи, $\dot{x}$ – швидкість зміни стану системи. Розглянемо систему

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^{n} X_j(x) u_j,$$

де $u_1, u_2, ..., u_n$ – скалярні функції керування.

Нехай задані початковий та кінцевий стан системи – x_0 та x_1 відповідно. Поставимо задачу знаходження найменшого (найкоротшого за довжиною) керування $(u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t))$, $t \in [0, 1]$, що переводить систему із стану x_0 в стан x_1, тобто $x(0) = x_0, x(1) = x_1$.

Функціонал, що задає умову "найменшості" на керування, це

$$l(u_1, u_2, ..., u_n) = \int_0^1 \sqrt{\sum_{j=1}^{n} u_j^2(t) dt}.$$

Тобто наша задача може бути записана як $\min l(u_1, u_2, ..., u_n)$. Тут де $u_1, u_2, ..., u_n$ – інтегровні в сенсі Лебега функції. Найчастіше достатньо розглядати кусково-постійні або кусково-неперервні функції. Для вирішення цієї задачі пошуку певних керувань $u_1, u_2, ..., u_n$ можна використовувати принцип максимума Понтрягіна [5].

В формулюванні задачі на мові теорії керування треба знайти керування, яке за оптимальний час переводить систему з одного певного стану в інший. Це еквівалентно пошуку найкоротшого шляху (кривої з найменшою довжиною) на многовиді з субрімановою метрикою між певними точками. За визначенням, криві на многовиді, у яких достатньо малі дуги є найкоротшими шляхами між точками на многовиді (тобто є локально найкоротшими), називаються геодезичними кривими. Таким чином, задача звелась до пошуку геодезичних кривих на многовиді з рімановою метрикою.

1.2. Субріманова метрика

Тепер розглянемо більш загальну задачу.

Нехай M – n-вимірний многовид з локальними координатами $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, а $X_1(x), X_2(x), ..., X_m(x)$ – набір гладких векторних полів ($m \leq n$). У випадку $m = n$ їх можна проінтерпретувати як базис дотичної площини до многовиду у кожній точці, якщо вектори цих полів у кожній точці є лінійно незалежними.

Означення 1.1. Субрімановою метрикою називають наступний вираз для відстані між точками на многовиді $x_0, x_1 \in M$:

$$\rho(x_0, x_1) = \inf_{u_i(t)} (\int_0^1 \sqrt{\sum_{i=1}^{m} u_i^2(t) dt}),$$

де $u_i(t)$, $i = 1, ..., m$ – функції, що задовольняють наступну крайову задачу:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) X_i(x), \\ x(0) = x_0, \\ x(1) = x_1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Зауважимо, що субріманова метрика є рімановою, якщо $m = n$ і векторні поля є лінійно незалежними, тобто кількість лінійно незалежних у будь-якій точці векторних полів $X_1(x), X_2(x), ..., X_m(x)$ збігається з розмірністю многовиду. Іншими словами, якщо ці векторні поля у кожній точці утворюють базис дотичної площини у цій точці. Але тоді легко з'ясувати, що система буде мати властивість повної керованості (за ранговим критерієм, див. нижче), тобто будь-яка точка є досяжною з будь-якої іншої точки многовиду. Це означає, що існують такі оптимальні керування $u_1, u_2, ..., u_n$, що переведуть систему з початкового стану x_0 у будь-який стан x_1 ($x_0, x_1 \in$

M).

Тоді стає цікаво, що буде відбуватись (з траєкторіями, орбітами, множиною досяжності системи), коли визначені векторні поля $X_1(x), X_2(x), ..., X_m(x)$ будуть або лінійно залежні у якійсь певній точці, або якесь з цих полів обернеться на 0, або просто $m < n$.

Для цього знадобиться поняття дужок Лі векторних полів.

1.3. Алгебра Лі векторних полів

Дужка Лі – це алгебраїчна операція, що асоціюється з алгеброю Лі, яка є лінійним простором з векторним добутком (що також називається дужкою Лі). Дужка Лі використовується для визначення структури алгебри Лі, які є алгебраїчними об'єктами, пов'язаними з групами Лі (гладкими многовидами, що мають групову структуру).

Для елементів X, Y з алгебри Лі, дужка Лі позначається як $[X, Y]$ і формально визначається наступним чином: $[X, Y] = XY - YX$, де XY та YX – добутки елементів X, Y в алгебрі Лі. Дужка Лі визначає «несиметричність» цих добутків.

Дужка Лі має наступні властивості:

1. Антикомутативність:

   $[X, Y] = -[Y, X]$.

2. Лінійність:

   $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$.

3. Тотожня дужка Лі:

   $[X, X] = 0$.

4. Тотожність Якобі: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Означення 1.2. (*Визначення досяжної точки на многовиді.*) Досяжна точка на многовиді в контексті теорії керування означає стан системи, який може бути досягнуто з використанням певного керування з певного фіксованого стану.

Нехай динамічна система задана на многовиді, і задача – визначити, які стани можуть бути досягнуті із заданих початкових умов при застосуванні керувань.

Означення 1.3. Множина досяжності – це множина всіх станів, які можуть бути досягнуті із заданих початкових станів за певний заданий інтервал часу або за певних умов. Вона визначає, які точки многовиду є досяжними з допомогою керування.

Теорема 1.4. (теорема про досяжність точок многовиду або ранговий критерій, див. [3], [1]) *Нехай многовид M зв'язний і для нього виконується умова Рашевського-Чоу: векторні поля $X_1, X_2, ..., X_m$ і їх всілякі дужки Лі покривають дотичний простір T_xM в кожній точці многовиду.*

Тоді кожна точка многовиду M є досяжною (1.2) з кожної точки многовиду.

Отже, якщо виконується умова Рашевського-Чоу, то кожна точка многовиду є досяжною з будь-якої, тобто буде існувати керування, що з початкового стану переведе систему в кінцевий стан (що відповідає цій точці). У теорії оптимального керування в такому випадку кажуть, що *система є повністю керованою.* Тобто теорема 1.4 надає умови повної керованості системи.

1.4. Задача швидкодії

Замість задачі мінімізації довжини кривої можна розглянути іншу задачу для системи (1.1), а саме, задачу швидкодії: знайти найменше $T > 0$ і керування, задані на відрізку $[0, T]$, які задовольняють обмеження

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^2(t) \leq 1$$

і розв'язують крайову задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=1}^{m} u_i(t) X_i(x), \\ x(0) = x_0, \\ x(T) = x_1. \end{cases}$$

Розглянуте тут геометричне обмеження на керування: $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$ є типовою умовою для задач теорії керування.

Ця задача швидкодії має розв'язок, тобто оптимальне керування існує; більш того, після очевидної перепараметризації воно є оптимальним для задачі (1.1), причому оптимальний час в задачі оптимальної швидкодії дорівнює субрімановій метриці [6]. У даній роботі ми будемо отримувати субріманову метрику, розглядаючи саме задачу оптимальної швидкодії.

У наступних двох розділах ми будемо розглядати задачі з площиною Грушина як многовидом та групою Гейзенберга, що утворює певний многовид. Такі задачі добре відомі як приклади субріманової метрики, див. [2], [3], [1], [4]; також вони досліджувалися в дипломних роботах К. Жарської і І. Лінючих, виконаних на кафедрі диференціальних рівнянь і керування у 2009 р.

В двох цих ситуаціях метрика не є рімановою, але причини цьому різні. В першому випадку (для метрики Грушина) метрика буде сингулярна, тобто в певній точці векторні поля будуть лінійно залежними, а точніше, одне з них обернеться в нуль. В другому випадку в кожній точці потрібно буде довизначати ще одне векторне поле, оскільки розмірність многовиду – три, а маємо лише два, але лінійно незалежних в кожній точці векторних поля.

Отже, в обох випадках потрібно буде розглядати дужку Лі двох векторних полів, але причина для цього своя для кожного прикладу.

Дужка Лі двох векторних полів на многовиді, якщо вона є лінійно незалежною з ними, дає ще один напрямок траєкторіям системи, тобто розширює множину досяжності. Можна зауважити, що в цьому напрямку траєкторія зростає повільніше, ніж в напрямках початкових векторних полів.

Отже, ставимо задачу знайти цю дужку Лі, незалежну з векторними полями X_1, X_2 в кожній точці, знайти траєкторію системи з точки зору теорії оптимального керування (задачі швидкодії) та з точки зору диференціальної геометрії (пошуку геодезичних кривих на многовиді з субрімановою метрикою) та порівняти отримані результати.

Розділ 2

Субріманова метрика на площині Грушина

В якості многовиду візьмемо площину $\mathbb{R}^2$. Побудуємо на ньому субріманову метрику, що задається системою з двох векторних полів

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

де x_1, x_2 – параметризація многовиду. Зауважимо, що ці векторні поля є незалежними в усіх точках даного многовиду (площини), окрім точок прямої $x_1 = 0$. Оскільки в цих точках кількість лінійно незалежних полів менша за розмірність многовиду, то щоб вдало задати базис дотичної площини, додамо в точках прямої $x_1 = 0$ вектор $[X_1, X_2]$, що є дужкою Лі векторних полів X_1, X_2. В нашому випадку, координати отриманого вектора:

$$[X_1, X_2]^1 = X_{11}\partial_1 X_{21} - X_{21}\partial_1 X_{11} + X_{12}\partial_2 X_{21} - X_{22}\partial_2 X_{11} = 0,$$

$$[X_1, X_2]^2 = X_{11}\partial_1 X_{22} - X_{21}\partial_1 X_{12} + X_{12}\partial_2 X_{22} - X_{22}\partial_2 X_{12} = 1\cdot 1 - 0 + 0 - x_1 \cdot 0 = 1.$$

Отже, $[X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ є лінійно незалежним з X_1, тобто може утворювати базис з X_1 в точках прямої $x_1 = 0$. Отримали, що векторні поля X_1, X_2 і їх дужка Лі $[X_1, X_2]$ покривають дотичний простір $T_x M$ в кожній точці зв'язного многовиду $M (x \in M)$, де M це площина $\mathbb{R}^2$. Тобто виконується умова Рашевського-Чоу. Тоді можемо застосувати теорему 1.4 про досяжність точок многовиду.

Векторні поля X_1, X_2 породжують наступну керовану систему:

$$\dot{x} = X_1(x)u_1 + X_2(x)u_2$$

де u_1, u_2 – керування. В координатному запису отримуємо нелінійну систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 u_2. \end{cases}$$

Розглянемо для цієї системи спочатку задачу теорії керування, а саме, задачу швидкодії, а потім розглянемо її як систему, що задає субріманову метрику. Зауважимо, що поза прямою $x_1 = 0$ субріманова метрика насправді є рімановою: для кожного дотичного вектора $v \in T_x M$ квадратична форма задається як $g_x(v) = v_1^2 + \dfrac{1}{x_1^2} v_2^2$.

2.1. Площина Грушина з точки зору теорії оптимального керування

Розглянемо наступну задачу швидкодії, тобто задачу з переведення системи з початкового фіксованого положення $x(t_0) = 0$ в фіксоване кінцеве положення $x(T) = \hat{x}$ за якнайменший час:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 u_2 \\ x_1(0) = 0, \qquad x_1(T) = \hat{x_1} \\ x_2(0) = 0, \qquad x_2(T) = \hat{x_2} \\ u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \\ T \to \min. \end{cases} \tag{2.1}$$

В нашій задачі початкова точка – початок координат – це положення системи в момент часу 0 ($t = 0$).

Вищенаведена система може бути записана у вигляді рівняння $\dot{x} = X_1(x)u_1 + X_2(x)u_2$ з векторними полями $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, для яких $[X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Оскільки для будь-якого $x_1 \in \mathbb{R}$ ранг системи векторів X_1, X_2, $[X_1, X_2]$ дорівнює 2 (що є розмірністю простору), то за ранговим критерієм система є повністю керованою.

Знайдемо оптимальне керування $u(t)$, тобто $u_1(t)$ та $u_2(t)$, яке розв'язує задачу швидкодії. Для цього скористуємося *принципом максимума Понтрягіна* [5]. Функція Гамільтона-Понтрягіна для нашої задачі швидкодії має такий вигляд: $H = u_1\psi_1 + x_1u_2\psi_2 - \lambda_0$, де $(\psi = \psi_1, \psi_2)$ – нова, спряжена змінна. Тоді отримаємо спряжену систему:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = -\psi_2 u_2(t) \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = 0. \end{cases}$$

З цієї системи випливає, що $\psi_2 = c$, $\dot{\psi}_1 = -u_2c$, де $c = const$.

Отже, маємо, що якщо $(\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t))$, $t \in [0, \hat{T}]$ – оптимальне керування, то існує $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ – не тотожньо нульовий розв'язок наступної системи:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_2 \hat{u}_2(t) \\ \dot{\psi}_2 = 0, \end{cases}$$

причому

$$\psi_1(t)\hat{u}_1(t) + \psi_2(t)\hat{u}_2(t)\hat{x}_1(t) = \max_{u_1^2+u_2^2 \leq 1} (\psi_1(t)u_1 + \psi_2(t)\hat{x}_1(t)u_2), \;\; t \in [0, \hat{T}],$$

де

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{u}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_1(t)\hat{u}_2(t). \end{cases}$$

Як показано в роботі [6], ми можемо замінити умову геометричного обмеження на керування з $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$ на умову зв'язку $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Таким чином отримуємо звичайну задачу на умовний екстремум у двовимірному просторі:

$$\begin{cases} \max(\psi_1(t)u_1(t) + \psi_2(t)\hat{x}_1(t)u_2) \\ u_1^2 + u_2^2 = 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

Для її розв'язання скористаємося методом множників Лагранжа. Функція Лагранжа для нашої задачі:

$$L = (u_1\psi_1 + x_1u_2\psi_2) - \lambda(u_1^2 + u_2^2 - 1).$$

Прирівнюємо до 0 частинні похідні функції Лагранжа по u_1 та u_2:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u_1} = 0 = \psi_1 - 2\lambda u_1, \\ \dfrac{\partial L}{\partial u_2} = 0 = \psi_2 x_1 - 2\lambda u_2. \end{cases}$$

Звідси отримуємо:

$$\begin{cases} \psi_1 = 2\lambda u_1 \\ \psi_2 = \dfrac{2\lambda u_2}{x_1}, \end{cases}$$

отже,

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\psi_1}{2\lambda} \\ u_2 = \dfrac{\psi_2 x_1}{2\lambda}. \end{cases}$$

Зауваження: λ може залежати від t, тому що задача (2.2) розглядається для кожного t окремо. Покажемо, що в нашому випадку λ не залежить від t. Для цього підставляємо отримані вирази для u_1 та u_2 у рівність $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Отримуємо

$$\frac{\psi_1^2 + \psi_2^2 x_1^2}{4\lambda^2} = 1, \quad \text{звідки} \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 x_1^2}}{2}.$$

Таким чином,

$$\lambda^2 = \frac{\psi_1^2 + \psi_2^2 x_1^2}{4}, \quad \text{звідки} \quad \psi_1^2 + \psi_2^2 x_1^2 = 4\lambda^2.$$

Ми хочемо показати, що $\lambda^2 = const$. Розглянемо для цього похідну:

$$\frac{d(\psi_1^2 + \psi_2^2 x_1^2)}{dt} = \frac{d\psi_1^2}{dt} + \frac{d(\psi_2^2 x_1^2)}{dt} = \frac{d\psi_1^2}{dt} + x_1^2\frac{d\psi_2^2}{dt} + \psi_2^2\frac{dx_1^2}{dt} =$$

[оскільки $\psi_2 = const$]

$$\frac{d\psi_1^2}{dt} + \psi_2^2\frac{dx_1^2}{dt} = 2\psi_1\dot{\psi_1} + \psi_2^2 2x_1\dot{x_1} =$$

$[\dot{\psi_1} = -\psi_2 u_2;\ \dot{x_1} = u_1]$

$$= -2\psi_1\psi_2 u_2 + 2\psi_2^2 x_1 u_1 = 2\psi_2(-\psi_1 u_2 + \psi_2 x_1 u_1) =$$

$[\psi_1 = 2\lambda u_1;\ \psi_2 = \frac{2\lambda u_2}{x_1}]$

$$= 2\psi_2(-2\lambda u_1 u_2 + \frac{2\lambda u_2}{x_1} x_1 u_1) = 2\psi_2(-2\lambda u_1 u_2 + 2\lambda u_2 u_1) = 0.$$

Отже, дійсно: $\lambda^2 = const \Rightarrow |\lambda| = const$. А оскільки в задачах з обмеженням на керування у вигляді нерівності (саме така задача й розглядається) λ має зберігати знак, то $\lambda = const$.

Отже,

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\psi_1}{2\lambda} \\ u_2 = \dfrac{\psi_2 x_1}{2\lambda}, \end{cases}$$

де $\lambda = const$. Тому можемо продиференціювати керування:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \dfrac{1}{2\lambda}\dot{\psi}_1 = \dfrac{-\psi_2}{2\lambda}u_2(t), \\ \dot{u}_2 = \dfrac{\psi_2}{2\lambda}\dot{x}_1 = \dfrac{\psi_2}{2\lambda}u_1. \end{cases}$$

Якщо позначити $k = \dfrac{\psi_2}{2\lambda}$, то отримуємо рівняння, з яких можна знайти оптимальні керування:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -ku_2, \\ \dot{u}_2 = ku_1. \end{cases}$$

Таким чином:

$$\begin{cases} u_1(t) = \cos(kt + b) \\ u_2(t) = \sin(kt + b). \end{cases}$$

Знаємо, що:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = u_1(t) = \cos(kt + b), \\ \dot{x_2}(t) = x_1(t)u_2(t) = x_1(t)\sin(kt + b). \end{cases}$$

Тоді розв'язуємо перше рівняння системи з початковою умовою $x_{10} = 0$:

$$x_1(t) - x_{1_0} = \int_0^t \cos(kt + b)dt = \frac{\sin(kt + b)}{k}|_0^t,$$

звідки

$$x_1(t) = \frac{\sin(kt + b) - \sin(b)}{k}.$$

Підставляємо отриманий розв'язок $x_1(t)$ в друге рівняння системи

$$\dot{x_2}(t) = \sin(kt + b) \cdot x_1(t),$$

отримуємо

$$\dot{x_2}(t) = \sin(kt + b)\frac{\sin(kt + b) - \sin(b)}{k}$$

та розв'язуємо його з початковою умовою $x_{20} = 0$:

$$x_2(t) - x_{20} = \int_0^t \sin(kt+b)\frac{\sin(kt+b) - \sin(b)}{k}dt =$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^t \sin^2(kt+b)dt - \frac{\sin(b)}{k}\int_0^t \sin(kt+b)dt =$$

$$[\sin^2(kt+b) = \frac{1-\cos 2(kt+b)}{2}]$$

$$= \frac{1}{2k}(t - \frac{\sin(2(kt+b))}{2k})|_0^t + \frac{\sin(b)}{k^2}\cos(kt+b)|_0^t =$$

$$= \frac{1}{2k}(t - \frac{\sin(2(kt+b))}{2k} + \frac{\sin(2b)}{2k}) + \frac{sin(b)}{k^2}(\cos(kt+b) - \cos(b)) =$$

$$= \frac{1}{4k^2}(2kt - \sin 2(kt+b) + \sin(b) + 4\sin(b)(\cos(kt+b) - \cos b)) =$$

$$= \frac{1}{4k^2}(2kt - \sin 2(kt+b) + 4\sin(b)\cos(kt+b) - \sin(2b)) =$$

$$= \frac{1}{4k^2}(2kt + 2\cos(kt+b))(2\sin(b) - \sin(kt+b)) - \sin(2b)).$$

Отже,

$$x_2(t) = \frac{1}{4k^2}(2kt - \sin 2(kt+b) + 4\sin(b)\cos(kt+b) - \sin(2b)) =$$

$$= \frac{1}{4k^2}(2kt + 2\cos(kt+b))(2\sin(b) - \sin(kt+b)) - \sin(2b)),$$

звідки отримуємо вираз для оптимальних траєкторій:

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{\sin(kt+b) - \sin(b)}{k} \\ x_2(t) = \dfrac{1}{4k^2}(2kt - \sin 2(kt+b) + 4\sin(b)\cos(kt+b) - \sin(2b)). \end{cases}$$

Знайдемо b з початкових умов для системи задачі швидкодії:

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння системи (2.1) маємо, що $u_2(0) = \frac{\psi_2}{2\lambda} x_1(0)$, а з іншого боку $u_2(0) = \sin(k \cdot 0 + b) = \sin b$. Оскільки $x_1(0) = 0$ (початкова умова), то $u_2(0) = 0$, тому $\sin b = 0$, а з цього випливає, що $b = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Підставляємо отриманий вираз для b ($b = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$) в отримані оптимальні траєкторії:

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{\sin(kt + \pi m) - \sin(\pi m)}{k} \\ x_2(t) = \dfrac{1}{4k^2}(2kt - \sin(2kt + 2\pi m) + 4\sin\pi m \cos(kt + \pi m) - \sin(2\pi m)). \end{cases}$$

Зауважимо, що $\sin(\pi m) = 0$, $\sin(2\pi m) = 0$, $\sin(2kt + 2\pi m) = \sin(2kt)$, $\sin(kt + \pi m) = (-1)^m \sin(kt)$. Тоді система траєкторій:

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{(-1)^m \sin(kt)}{k} \\ x_2(t) = \dfrac{1}{4k^2}(2kt - \sin(2kt)), \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} x_1(t) = \pm\dfrac{\sin(kt)}{k} \\ x_2(t) = \dfrac{t}{2k} - \dfrac{\sin(2kt)}{4k^2} \end{cases}$$

при оптимальному керуванні:

$$\begin{cases} u_1(t) = \cos(kt) \\ u_2(t) = \sin(kt). \end{cases}$$

Зауваження. Можна показати [1], що оптимальною у сенсі швидкодії буде лише ділянка траєкторії, яка не включає точки, для яких $x_1(t) = 0$, $t > 0$. Це означає, що для параметра k і оптимального часу T має виконуватися умова $kT \leq \pi$.

2.2. Площина Грушина з точки зору субріманової метрики: знаходження геодезичних

Площина Грушина – многовид розмірності $n = 2$ з квадратичною формою G, де $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{21} = 0$, $g_{22} = \dfrac{1}{x_1^2}$. Субріманова метрика на даному многовиді визначається як:

$$\rho(x_0, x_1) = \inf_{u_i(t)} (\int_0^1 \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt),$$

де $u_1(t), u_2(t)$ відповідають наступній системі диференціальних рівнянь і початкових умов:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u_1(t)X_1(x) + u_2(t)X_2(x) \\ x(0) = x_0 \\ x(1) = x_1. \end{cases}$$

Хочемо знайти криву, що з'єднує x_0, x_1 та має найменшу довжину $\rho(x_0, x_1)$, тобто треба мінімізувати функціонал $l(u_1, u_2) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt$. Іншими словами, необхідно знайти $u_1(t), u_2(t)$, для яких $\rho(x_0, x_1) = \min l(u_1, u_2)$.

Для цього знаходимо геодезичні лінії за допомогою рівняння, що виводиться для мінімізації функціоналу $\displaystyle\int ||\dot{\gamma}|| dt = \int \sqrt{\sum g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j} dt$ – це рівняння Ейлера для функціоналу довжини кривої γ:

$$\frac{d^2x_j}{dt^2} + \sum_{k,i} \Gamma^j_{ki} \frac{dx_k}{dt}\frac{dx_i}{dt} = 0, \quad j = 1, 2,$$

де Γ^j_{ki} – символ Кристофеля другого роду, що знаходиться за наступною формулою:

$$\Gamma^j_{ki} = \sum_{m=1}^{2} \frac{1}{2} g^{jm} (\frac{\partial g_{mi}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_m}), \quad i, k, j = 1, 2,$$

де g^{jm} – елемент матриці G^{-1} оберненої до G ($GG^{-1} = I$, I – одинична матриця), тобто

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_1^2} \end{pmatrix}, \quad \text{звідки} \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо значення кожного символу Кристофеля $\Gamma^j_{ki}, \forall i, j, k = 1, 2.$

Зауваження 1: оскільки G, G^{-1} - симетричні матриці, то $\Gamma^j_{ki} = \Gamma^j_{ik}$.

Зауваження 2: оскільки в матрицях G, G^{-1} єдиний елемент, чия похідна може бути не 0, – це g_{22}, причому якщо диференціювати по dx_1, то символи Кристофеля будуть ненульові тільки для набору індексів, що складається з чисел 1, 2, 2. Маємо:

$$\Gamma^2_{12} = \sum_{m=1}^{2} \frac{1}{2} g^{2m} (\frac{\partial g_{m2}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{1m}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x_m}) =$$

$$= \frac{1}{2}(g^{21}(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}) + g^{22}(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2})) =$$

$$= \frac{1}{2} g^{22}(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2}) = \frac{1}{2} g^{22}(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}) = \frac{1}{2} x_1^2 \frac{\partial (x_1^{-2})}{\partial x_1} = -\frac{1}{x_1},$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = -\frac{1}{x_1},$$

$$\Gamma_{22}^1 = \sum_{m=1}^{2} \frac{1}{2} g^{1m} (\frac{\partial g_{m2}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{2m}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_m}) =$$

$$= \frac{1}{2}(g^{11}(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}) + g^{12}(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_2}) =$$

$$= \frac{1}{2} g_{11}(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}) = \frac{1}{2} g_{11}(-\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial (x_1^{-2})}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1^3}.$$

Всі інші символи Кристофеля другого роду дорівнюють 0:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Підставляємо отримані значення для символів Кристофеля в рівняння геодезичних кривих на многовиді:

$$\frac{d^2 x_j}{dt^2} + \sum_{k,i=1}^{2} \Gamma_{ki}^j \frac{dx_k}{dt} \frac{dx_i}{dt} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Записуємо у вигляді системи для кожної координати (x_1, x_2):

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} + \sum\limits_{k,i=1}^{2} \Gamma_{ki}^1 \dfrac{dx_k}{dt} \dfrac{dx_i}{dt} = 0 \\ \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} + \sum\limits_{k,i=1}^{2} \Gamma_{ki}^2 \dfrac{dx_k}{dt} \dfrac{dx_i}{dt} = 0, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \Gamma_{22}^1 (\frac{dx_2}{dt})^2 = 0 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} + \dfrac{1}{x_1^3} (\dfrac{dx_2}{dt})^2 = 0 \\ \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} - \dfrac{2}{x_1} \dfrac{dx_1}{dt} \dfrac{dx_2}{dt} = 0. \end{cases}$$

Остаточно отримуємо

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -\dfrac{1}{x_1^3}(\dfrac{dx_2}{dt})^2 \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = \dfrac{2}{x_1}\dfrac{dx_1}{dt}\dfrac{dx_2}{dt}. \end{cases}$$

Зауважимо, що якщо $(x_1(t), x_2(t))$ – розв'язок вищенаведеної системи, то $(x_1(t), -x_2(t)), (x_1(t), x_2(t)+const), (-x_1(t), x_2(t))$ також є її розв'язком.

Тепер запишемо рівняння для $x_2(x_1)$. Розглянемо $\dfrac{d^2x_2}{dx_1^2}$:

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{d}{dx_1}(\frac{dx_2}{dx_1}) = \frac{d}{dx_1}(\frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}}) =$$

$$[\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx_1}\frac{dx_1}{dt} \Rightarrow \frac{df}{dx_1} = \frac{\frac{df}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}}]$$

$$= \frac{1}{\frac{dx_1}{dt}}\frac{d}{dt}(\frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}}) = \frac{1}{\frac{dx_1}{dt}}\frac{\frac{d^2x_2}{dt^2}\frac{dx_1}{dt} - \frac{d^2x_1}{dt^2}\frac{dx_2}{dt}}{(\frac{dx_1}{dt})^2} = \frac{\frac{d^2x_2}{dt^2}\frac{dx_1}{dt} - \frac{d^2x_1}{dt^2}\frac{dx_2}{dt}}{(\frac{dx_1}{dt})^3}.$$

Підставляємо $\dfrac{d^2x_2}{dx_1^2}$ вирази для $\dfrac{d^2x_1}{dt^2}$, $\dfrac{d^2x_2}{dt}$ з системи на координати геодезичної кривої:

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{\frac{2}{x_1}(\frac{dx_1}{dt})^2\frac{dx_2}{dt} + \frac{1}{x_1^3}(\frac{dx_2}{dt})^3}{(\frac{dx_1}{dt})^3} = \frac{2}{x_1}\frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} + \frac{1}{x_1^3}\frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} =$$

$$[\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}}]$$

$$= \frac{2}{x_1}x_2' + \frac{1}{x_1^3}(x_2')^3,$$

тобто отримали наступне рівняння:

$$x_2'' = (\frac{x_2'}{x_1})^3 + 2\frac{x_2'}{x_1}. \qquad (2.3)$$

Вкажемо його очевидний частинний розв'язок $x_2(x_1) = const$, з якого отримуємо наступні геодезичні у вигляді прямих:

$$x_2(t) = const, \quad x_1(t) = \pm t.$$

Для знаходження загального розв'язку диференціального рівняння зручно ввести функцію $w(x_1) = \dfrac{x_2'}{x_1}$. Тоді права частина рівняння (2.3) записується у вигляді $w_1^3 + 2w$. Залишилось виразити x_2'' через $w(x_1)$. Для цього розглянемо вираз $\dfrac{dw}{dx_1}$:

$$\frac{dw}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}(\frac{x_2'}{x_1}) =$$

$$= \frac{\frac{d^2x_2}{d^2x_1}x_1 - \frac{dx_2}{dx_1}\frac{dx_1}{dx_1}}{x_1^2} = \frac{1}{x_1}\frac{d^2x_2}{dx_1^2} - \frac{1}{x_1^2}\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2''}{x_1} - \frac{1}{x_1}(\frac{x_2'}{x_1}) =$$

$[w = \dfrac{x_2'}{x_1}]$

$$= \frac{x_2''}{x_1} - \frac{w(x_1)}{x_1}.$$

Тоді $x_2'' = x_1\dfrac{dw}{dx_1} + w$. Таким чином рівняння (2.3) зведеться до рівняння

$$x_1\frac{dw}{dx_1} + w = w^3 + 2w,$$

тобто до рівняння зі змінними, що розділяються:

$$x_1\frac{dw}{dx_1} = w^3 + w \ \Leftrightarrow \ \frac{dw}{w(w^2+1)} = \frac{dx_1}{x_1}.$$

Оскільки $\dfrac{1}{w(w^2+1)} = \dfrac{1}{w} - \dfrac{w}{w^2+1}$, то

$$\int \frac{dw}{w(w^2+1)} = \int \frac{dw}{w} - \int \frac{w}{w^2+1}dw = \int \frac{dx_1}{x_1},$$

звідки

$$\ln|w| - \frac{1}{2}\ln(|w^2+1|) = \ln|x_1| + C_0, \quad \text{де} \quad C_0 - const.$$

Розглянемо $x_1 > 0$, домножимо на 2 та пропотенціюємо дві частини попередньої рівності:

$$\frac{w^2}{w^2+1} = x_1^2 C,\ C > 0, C\ = const\ \Rightarrow\ w = \sqrt{\frac{Cx_1^2}{1-x_1^2 C}}$$

Але $w = \frac{x_2'}{x_1}$, тому $\frac{dx_2}{x_1 dx_1} = \sqrt{\frac{Cx_1^2}{1-x_1^2C}}$, звідки $dx_2 = \sqrt{\frac{Cx_1^2}{1-x_1^2C}} x_1 dx_1$. Інтегруємо:

$$\int dx_2 = \int \sqrt{\frac{Cx_1^2}{1-x_1^2C}} \frac{d(Cx_1^2)}{2C}$$

Оскільки $C > 0$ та підкореневий вираз додатний ($1 - Cx_1^2 > 0 \Rightarrow Cx_1^2 < 1$), то можемо зробити підстановку

$$Cx_1^2 = \sin^2\alpha(x_1) \quad (\text{тоді } \alpha = \arcsin\sqrt{Cx_1^2}).$$

Тоді

$$\int dx_2 = \int \sqrt{\frac{Cx_1^2}{1-x_1^2C}} x_1 dx_1 = \int \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}} \frac{d(\sin^2\alpha)}{2C} =$$

$$= \int \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2C} d\alpha = \frac{1}{C}\int \sin^2\alpha d\alpha =$$

$$= \frac{1}{C}\int \frac{1-\cos 2\alpha}{2} d\alpha = \frac{\alpha}{2C} - \frac{\sin 2\alpha}{4C} + C_2 = \frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{2C} + C_2,$$

де $C_2 = const$. Повертаємось до початкової змінної x_1:

$$x_2 = \frac{\arcsin\sqrt{Cx_1^2}}{2C} - \frac{\sin(2\arcsin\sqrt{Cx_1^2})}{4C} + C_2.$$

Залишилось знайти $x_1(t)$. Для цього розглянемо рівняння на першу координату геодезичної кривої і замість $\frac{dx_2}{dt}$ підставимо функцію від x_1, $\frac{dx_1}{dt}$:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{1}{x_1^3}(\frac{dx_2}{dt})^2 = 0,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2}{dx_1}\frac{dx_1}{dt} = \sqrt{\frac{Cx_1^2}{1-Cx_1^2}}x_1\frac{dx_1}{dt},$$

звідки

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{1}{x_1^3}(x_1\sqrt{\frac{Cx_1^2}{1-Cx_1^2}}\frac{dx_1}{dt})^2 = 0,$$

а тому

$$\frac{d}{dt}(\frac{dx_1}{dt}) + \frac{Cx_1}{1-Cx_1^2}(\frac{dx_1}{dt})^2 = 0.$$

Введемо $p(x_1) = \frac{dx_1}{dt}$. Тоді отримуємо

$$\frac{dp}{dt} + \frac{Cx_1}{1-Cx_1^2}p^2 = 0.$$

Поділимо на p:

$$\frac{\frac{dp}{dt}}{p} + \frac{Cx_1}{1-Cx_1^2}p = 0.$$

Зауважимо, що:

$$\frac{\frac{dp}{dt}}{p} = \frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} = \frac{dp}{dx_1} = p'.$$

Отримали просте лінійне однорідне рівняння зі змінними, що розділяються:

$$p' + \frac{Cx_1}{1-Cx_1^2}p = 0 \;\Rightarrow\; \frac{p'}{p} = \frac{Cx_1}{Cx_1^2-1},$$

тобто

$$\frac{dp}{p} = \frac{Cx_1dx_1}{Cx_1^2-1} = \frac{d(Cx_1^2-1)}{2(Cx_1^2-1)},$$

звідки отримуємо

$$\ln|p| = \frac{1}{2}\ln|Cx_1^2-1| + C_3 = \frac{1}{2}\ln(1-Cx_1^2) + C_3,$$

де $C_3 = const$, причому $C_3 = \lim\limits_{x\to 0}\ln|p(x_1)| = 0$.

Оскільки маємо сингулярність метрики на прямій $x_1 = 0$ та інваріантність зсувів по вісі Ox_2, то отрмимуємо наступні умови для нормування:

$$x_1(0) = 0,\ \dot{x_1}(0) = 1,\ x_2(0) = 0,\ \dot{x_2}(0) = 0,$$

звідки $C_3 = 0$, $p > 0$. Тоді

$$\ln p = \ln \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{2} \ln (1 - Cx_1^2),$$

тобто

$$\frac{dx_1}{dt} = \sqrt{1 - Cx_1^2} \ \Rightarrow\ \frac{dx_1}{\sqrt{1 - Cx_1^2}} = dt \ \Rightarrow\ \arcsin (\sqrt{C} x_1) = t\sqrt{C}.$$

Отримали $x_1(t) = \dfrac{\sin (t\sqrt{C})}{\sqrt{C}}$, що є розв'язком і коли $\dfrac{dx_1}{dt} < 0$.

Тепер заходимо $x_2(t)$, підставляючи $x_1(t)$ в отриманий вираз для $x_2(x_1)$:

$$x_2(x_1(t)) = \frac{\arcsin \sqrt{Cx_1^2(t)}}{2C} - \frac{\sin(2 \arcsin \sqrt{Cx_1^2(t)})}{4C} + C_2 =$$

$[x_1(t) = \dfrac{\sin (t\sqrt{C})}{\sqrt{C}}]$

$$= \frac{\arcsin \sqrt{C \frac{\sin^2 t\sqrt{C}}{C}}}{2C} - \frac{\sin (2 \arcsin \sqrt{C \frac{\sin^2 t\sqrt{C}}{C}})}{4C} + C_2 =$$

$$= \frac{\arcsin (\sin t\sqrt{C})}{2C} - \frac{\sin (2 \arcsin (\sin t\sqrt{C}))}{4C} + C_2 = \frac{t\sqrt{C}}{2C} - \frac{\sin (2t\sqrt{C})}{4C} + C_2.$$

Отже, геодезичними лініями на площині Грушина є криві, що задаються наступним чином:

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{\sin (t\sqrt{C})}{\sqrt{C}} \\ x_2(t) = \dfrac{t\sqrt{C}}{2C} - \dfrac{\sin (2t\sqrt{C})}{4C} + C_2. \end{cases}$$

Покладемо $c := \sqrt{C}$. Оскільки $x_2(0) = 0$, то $C_2 = 0$. Остаточно, отримуємо

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{\sin{(ct)}}{c} \\ x_2(t) = \dfrac{t}{2c} - \dfrac{\sin{(2ct)}}{4c^2}. \end{cases}$$

Зауважимо, що рівняння геодезичних кривих на многовиді з метрикою Грушина співпадає з отриманими траєкторіями системи в задачі швидкодії (2.1).

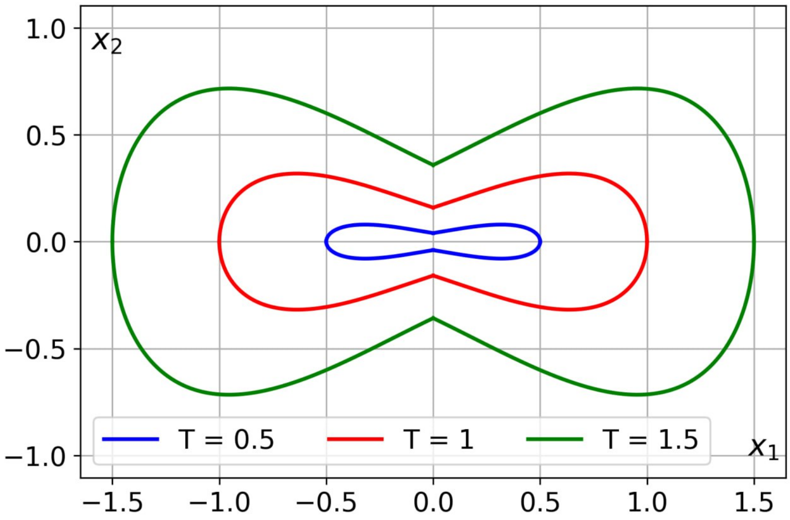

Рис. 2.1: Межі множин досяжності для різних значень T

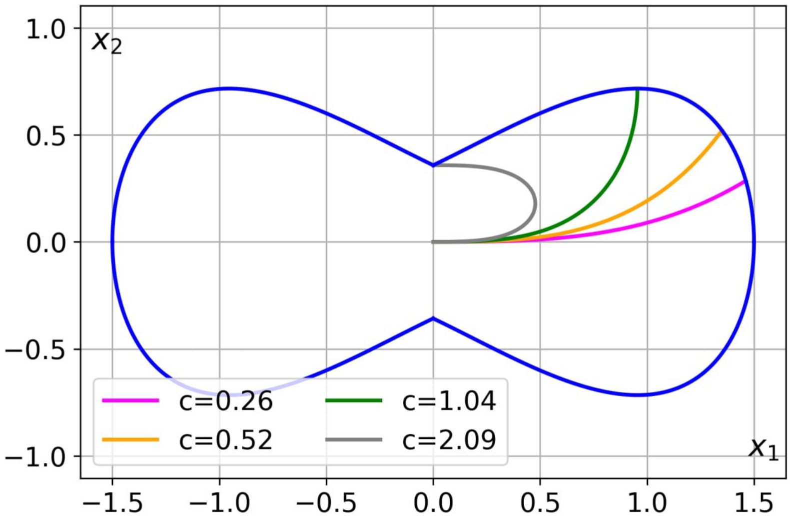

Рис. 2.2: Геодезичні криві на многовиді для $T = 1.5$

Розділ 3

Субріманова метрика на групі Гейзенберга

Означення 3.1. Група Гейзенберга (позначається як H_3) – множина квадратних матриць виду

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}$, з операцією множення. Зауважимо, що множина з такою алгебраїчною операцією дійсно утворює групу за визначенням, оскільки виконується замкненість відносно операції множення; асоціативність (властивість асоціативності множення матриць); існування нейтрального елементу ("одиниці"), що належить цій множині:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(a = b = c = 0)$, де $AI = IA = A$ для всіх A у вищевизначеній множині; існування оберненої матриці для кожного елемента множини, що також належить цій множині: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ матриця

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab - c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

є оберненою для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

оскільки задовольняє умову $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Зауважимо, що група Гейзенберга не є лінійним простором, оскільки результати операції додавання та множення на скаляр, що не дорівнює одиниці, не належать H_3. Справді, для будь-яких $A_1, A_2 \in H_3$, якщо

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & c_2 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 2 & a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \\ 0 & 2 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \notin H_3$$

і для будь-якого $\lambda \in \mathbb{R}$, якщо

$$\lambda A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda a_1 & \lambda c_1 \\ 0 & \lambda & \lambda b_1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in H_3,$$

то $\lambda = 1$.

Групу Гейзенберга визначають три параметри $a, b, c \in \mathbb{R}$, тобто вона тривимірна. Будемо розглядати цю групу як тривимірний многовид у дев'ятивимірному просторі матриць розміру три на три.

Оскільки на цьому многовиді визначена операція множення, що є неперервною як відображення, то група Гейзенберга є групою Лі, причому дотичним простором до одиничного елементу буде алгебра Лі, що породжується двома векторними полями: $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Ці векторні поля є лінійно незалежними, але їх кількість менша за розмірність многовиду, тому щоб вдало задати базис дотичної площини, треба додати ще одне векторне поле, що є дужкою Лі векторних полів X_1, X_2. Оскільки алгебра Лі задана на гладкому многовиді, то дужка Лі діє як диференціальний оператор, тому координати отриманого вектора такі:

$$[X_1, X_2]^1 = X_1^j \partial_j X_2^1 - X_2^j \partial_j X_1^1 = X_1^1 \partial_1 X_2^1 - X_2^1 \partial_1 X_1^1 = 0,$$

$$[X_1, X_2]^2 = X_1^j \partial_j X_2^2 - X_2^j \partial_j X_1^2 = X_1^1 \partial_1 X_2^2 - X_2^1 \partial_1 X_1^2 = 0,$$

$$[X_1, X_2]^3 = X_1^j \partial_j X_2^3 - X_2^j \partial_j X_1^3 = X_1^1 \partial_1 X_2^3 - X_2^1 \partial_1 X_1^3 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Отже, $[X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, що є лінійно незалежним від X_1 та X_2 в усіх точках многовиду, тобто вектори $X_1, X_2, [X_1, X_2]$ можуть утворювати базис тривимірного простору.

Маємо, що дотичний простір $T_x M$ в кожній точці зв'язного многовиду M $(x \in M)$, де M це тривимірний многовид, що утворюється групою Гейзенберга, покривається векторними полями X_1, X_2 та їх дужкою Лі $[X_1, X_2]$. Це означає, що виконується умова Рашевського-Чоу, а з цього випливає досяжність кожної точки многовиду M.

Векторні поля X_1, X_2 породжують наступну систему:

$$\dot{x} = X_1(x) u_1(t) + X_2(x) u_2(t), \tag{3.1}$$

де $u_1(t), u_2(t)$ можуть розглядатися як керування. В нашому випадку отримуємо наступну керовану нелінійну систему:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = u_1 \\ \dot{x_2} = u_2 \\ \dot{x_3} = x_1 u_2. \end{cases} \tag{3.2}$$

Розглянемо для цієї системи спочатку задачу швидкодії, а потім розглянемо її як систему, що задає субріманову метрику аналогічно попередньому розділу.

3.1. Група Гейзенберга з точки зору теорії оптимального керування

Розглянемо задачу з переведення системи з початкового фіксованого положення $x(t_0) = x_0$ в фіксоване кінцеве положення $x(T) = \hat{x}$ за якнайменший час:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = u_1 \\ \dot{x_2} = u_2 \\ \dot{x_3} = x_1 u_2 \\ x_1(0) = 0, \qquad x_1(T) = \hat{x_1}, \\ x_2(0) = 0, \qquad x_2(T) = \hat{x_2}, \\ x_3(0) = 0, \qquad x_3(T) = \hat{x_3}, \\ u_1^2 + u_2^2 \leq 1, \\ T \to \min. \end{cases}$$

В цій задачі швидкодії початкова точка (положення системи в момент часу 0, тобто при $t = 0$) – початок координат.

Можемо записати вищенаведену систему як $\dot{x} = X_1(x)u_1 + X_2(x)u_2$, де векторні поля $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $[X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Оскільки векторні поля X_1, X_2, $[X_1, X_2]$ лінійно незалежні $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, то ранг системи векторів X_1, X_2, $[X_1, X_2]$ дорівнює розмірності простору (а саме, 3), тобто система є повністю керованою за ранговим критерієм.

Розв'язати задачу швикодії означає знайти оптимальне керування $u(t)$, тобто u_1 та u_2. Для цього використаємо *принцип максимума Понтрягіна.* Функція Гамільтона-Понтрягіна для нашої задачі швидкодії:

$$H = u_1\psi_1 + u_2\psi_2 + x_1u_2\psi_3 - \lambda_0,$$

де ψ_1, ψ_2, ψ_3 – спряжені змінні. Спряжена система:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = -u_2\psi_3 \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \\ \dot{\psi}_3 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_3} = 0, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -u_2\psi_3 \\ \dot{\psi}_2 = 0 \\ \dot{\psi}_3 = 0. \end{cases}$$

Маємо, що $\psi_2 = const$, $\psi_3 = const$ та будемо вважати, що $\psi_3 \neq 0$.

Якщо $(\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t))$, $t \in [0, \hat{T}]$ – оптимальне керування, то існує

$(\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$ – не тотожньо нульовий розв'язок наступної системи:

$$\begin{cases} \dot{\psi_1} = -\psi_3 \hat{u_2}(t) \\ \dot{\psi_2} = 0 \\ \dot{\psi_3} = 0, \end{cases}$$

причому

$$\psi_1(t)\hat{u_1}(t) + \psi_2(t)\hat{u_2}(t) + \psi_3(t)\hat{x_1}(t)\hat{u_2}(t) =$$

$$= \max_{u_1^2+u_2^2 \leq 1} (\psi_1(t)u_1(t) + \psi_2(t)u_2(t) + \psi_3(t)\hat{x_1}(t)u_2(t)),$$

$t \in [0, \hat{T}]$, де

$$\begin{cases} \dot{\hat{x_1}}(t) = \hat{u_1}(t) \\ \dot{\hat{x_2}}(t) = \hat{u_2}(t) \\ \dot{\hat{x_3}}(t) = \hat{x_1}(t)\hat{u_2}(t). \end{cases}$$

Аналогічно задачі швидкодії у попередньому розділі можемо еквівалентно замінити умову обмеження на керування з $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$ на умову зв'язку $u_1^2 + u_2^2 = 1$ для задачі на умовний екстремум.

$$\begin{cases} \max(\psi_1(t)u_1(t) + \psi_2(t)u_2(t) + \psi_3(t)\hat{x_1}(t)u_2(t)) \\ u_1^2 + u_2^2 = 1. \end{cases}$$

За методом множників Лагранжа функцією Лагранжа для нашої задачі є:

$$L = (u_1\psi_1 + u_2\psi_2 + x_1u_2\psi_3) - \lambda(u_1^2 + u_2^2 - 1).$$

Прирівнюємо до 0 частинні похідні функції Лагранжа по u_1 та u_2:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u_1} = 0 = \psi_1 - 2\lambda u_1 \\ \dfrac{\partial L}{\partial u_2} = 0 = (\psi_2 + \psi_3 x_1) - 2\lambda u_2, \end{cases}$$

звідки отримуємо

$$\begin{cases} u_1 = -\dfrac{\psi_1}{2\lambda} \\ u_2 = -\dfrac{\psi_2 + \psi_3 x_1}{2\lambda}. \end{cases}$$

Зберігаємо умову $u_1^2 + u_2^2 = 1$, тоді:

$$\frac{\psi_1^2}{4\lambda^2} + \frac{(\psi_2 + \psi_3 x_1)^2}{4\lambda^2} = 1,$$

звідки

$$\lambda = \frac{\sqrt{\psi_1^2 + (\psi_2 + \psi_3 x_1)^2}}{2}.$$

Аналогічно попередньому розділу, $\lambda = const$.

Диференціюємо вищеотриману систему:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -\dfrac{\dot{\psi}_1}{2\lambda} = \dfrac{\psi_3}{2\lambda} u_2 \\ \dot{u}_2 = -\dfrac{\dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3 x_1 + \psi_3 \dot{x}_1}{2\lambda} = -\dfrac{\psi_3}{2\lambda} u_1. \end{cases}$$

Позначимо $C = \dfrac{\psi_3}{2\lambda}$, тоді система набуває вигляду системи звичайних диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = C u_2 \\ \dot{u}_2 = -C u_1. \end{cases}$$

Аналогічно попередньому розділу отримуємо оптимальні керування:

$$\begin{cases} u_1(t) = \sin{(Ct + \delta)} \\ u_2(t) = -\cos{(Ct + \delta)}. \end{cases}$$

Тоді система для знаходження оптимальної траєкторії має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \sin{(Ct + \delta)} \\ \dot{x_2} = -\cos{(Ct + \delta)} \\ \dot{x_3} = -x_1\cos{(Ct + \delta)}. \end{cases}$$

Розв'язуємо окремо кожне рівняння, як рівняння зі змінними, що розділяються:

$$x_1 - x_{10} = \int_0^t \sin{(Ct + \delta)}dt = -\frac{\cos{(Ct + \delta)}}{C}|_0^t = -\frac{\cos{(Ct + \delta)}}{C} + \frac{\cos\delta}{C},$$

$$x_2 - x_{20} = -\int_0^t \cos{(Ct + \delta)}dt = -\frac{\sin{(Ct + \delta)}}{C}|_0^t = -\frac{\sin{(Ct + \delta)}}{C} + \frac{\sin\delta}{C},$$

$$x_3 - x_{30} = -\int_0^t x_1\cos{(Ct + \delta)}dt =$$

$$[x_{10} = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\cos{(Ct + \delta)}}{C} + \frac{\cos\delta}{C}]$$

$$= -\int_0^t (-\frac{\cos{(Ct + \delta)}}{C} + \frac{\cos\delta}{C})\cos{(Ct + \delta)}dt =$$

$$= \frac{1}{C}\int_0^t \cos^2{(Ct + \delta)}dt - \frac{\cos\delta}{C}\int_0^t \cos{(Ct + \delta)}dt =$$

$$= \frac{1}{2C}\int_0^t (1 + \cos 2(Ct + \delta))dt - \frac{\cos\delta}{C}\int_0^t \cos{(Ct + \delta)}dt =$$

$$= \frac{t}{2C} + \frac{1}{4C^2}\sin 2(Ct + \delta)|_0^t - \frac{\cos\delta}{C^2}\sin{(Ct + \delta)}|_0^t =$$

$$= \frac{t}{2C} + \frac{\sin 2(Ct + \delta)}{4C^2} - \frac{\sin 2\delta}{4C^2} - \frac{\cos\delta}{C^2}\sin{(Ct + \delta)} + \frac{\cos\delta}{C^2}\sin\delta =$$

$$= \frac{t}{2C} + \frac{\sin 2(Ct + \delta)}{4C^2} - \frac{\sin 2\delta}{4C^2} - \frac{\cos\delta}{C^2}\sin{(Ct + \delta)} + \frac{\sin 2\delta}{2C^2} =$$

$$= \frac{t}{2C} + \frac{\sin 2(Ct + \delta)}{4C^2} + \frac{\sin 2\delta}{4C^2} - \frac{\cos\delta}{C^2}\sin{(Ct + \delta)} =$$

$[\sin(Ct+\delta)\cos\delta = \frac{1}{2}(\sin(Ct) + \sin(Ct+2\delta))]$

$$= \frac{t}{2C} + \frac{\sin 2(Ct+\delta)}{4C^2} + \frac{\sin(2\delta)}{4C^2} - \frac{\sin Ct}{2C^2} - \frac{\sin(Ct+2\delta)}{2C^2}.$$

Отримуємо наступний розв'язок (враховуючи, що $x_{10} = 0$, $x_{20} = 0$, $x_{30} = 0$):

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{\cos(Ct+\delta)}{C} + \frac{\cos\delta}{C} \\ x_2(t) = -\frac{\sin(Ct+\delta)}{C} + \frac{\sin\delta}{C} \\ x_3(t) = \frac{t}{2C} + \frac{\sin 2(Ct+\delta)}{4C^2} + \frac{\sin(2\delta)}{4C^2} - \frac{\sin Ct}{2C^2} - \frac{\sin(Ct+2\delta)}{2C^2}. \end{cases}$$

3.2. Група Гейзенберга з точки зору субріманової метрики: знаходження геодезичних

Для знаходження геодезичних можна звести тривимірну задачу до двовимірної: зменшити розмірність многовиду, що буде розглядатись, до двох. Для цього спочатку зробимо заміну

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = 2x_3 - x_1 x_2. \end{cases}$$

В цих координатах система матиме вигляд

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = u_1 \\ \dot{y}_2 = u_2 \\ \dot{y}_3 = y_1 u_2 - y_2 u_1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Тепер зробимо циліндричну заміну координат (введемо змінні ρ, ϕ):

$$\begin{cases} y_1 = \rho \sin \phi \\ y_2 = \rho \cos \phi \\ y_3 = z. \end{cases}$$

Диференціюємо по t:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = \dot{\rho} \sin \phi + \rho \cos \phi \dot{\phi} = u_1 \\ \dot{y_2} = \dot{\rho} \cos \phi - \rho \sin \phi \dot{\phi} = u_2 \\ \dot{y_3} = \dot{z} = \rho \sin \phi u_2 - \rho \cos \phi u_1. \end{cases}$$

Додаючи перше рівняння системи, помножене на $\cos \phi$, до другого, помноженого на $\sin \phi$, а потім перше на $-\sin \phi$ до другого, що помножене на $\cos \phi$, отримуємо наступну систему:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = u_1 \cos \phi + u_2 \sin \phi \\ \rho \dot{\phi} = u_2 \cos \phi - u_1 \sin \phi \end{cases}$$

Позначимо

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \cos \phi + u_2 \sin \phi \\ v_2 = u_2 \cos \phi - u_1 \sin \phi, \end{cases}$$

тоді $v_1 = \dot{\rho}$, $v_2 = \rho \dot{\phi}$. Отже, отримали систему другого порядку, що зв'язана з площиною Грушина:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = v_1 \\ \dot{z} = \rho v_2. \end{cases}$$

Для цього многовиду (площини $\mathbb{R}^2$ з метрикою Грушина) вже були знайдені рівняння на координати геодезичних ліній у розділі 2.2:

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{\sin(ct)}{c} \\ z = \dfrac{t}{2c} - \dfrac{\sin(2ct)}{4c^2}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Зауважимо, що якщо підставити вирази для координат геодезичних кривих із системи (3.4) в початкову систему, то отримаємо рівняння геодезичних кривих для тривимірного многовиду, що збігається з траєкторіями системи для задачі швидкодії, які отримане в розділі 3.1.

Висновки

В даній роботі було проілюстровано зв'язок між задачами теорії керування (задачами швидкодії) та диференціальною геометрією (задачею пошуку геодезичних кривих на многовиді з субрімановою метрикою).

Були детально проаналізовані два субрімановi многовиди – площина Грушина та група Гейзенберга. В цих прикладах відповідна метрика не є рімановою, але причини цьому різні. Для площини Грушина метрика є сингулярною, тобто в деяких точках векторні поля є лінійно залежними. Для групи Гейзенберга розмірність многовиду – три, а маємо лише два лінійно незалежних векторних поля.

Із застосуванням принципу максимума Понтрягіна були знайдені в явному вигляді оптимальні за швидкодією керування і оптимальні траєкторії. Також були отримані і розв'язані диференціальні рівняння геодезичних. Було показано, що ці методи еквівалентні, тобто приводять до однакових результатів.

Список використаних джерел

[1] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain. A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry (from Hamiltonian viewpoint) (electronic), 2019. https://people.sissa.it/~agrachev/agrachev_files/ABB-final-SRnotes.pdf

[2] A. Bellaïche: The tangent space in sub-Riemannian geometry. In: Sub-Riemannian Geometry. Progress in Mathematics, vol 144. Birkhäuser Basel, 1996, 1–78.

[3] E. Le Donne. Lecture notes on sub-Riemannian geometry (from the Lie group viewpoint) (electronic), 2021. https://cvgmt.sns.it/media/doc/paper/5339/sub-Riem_notes.pdf

[4] R. R. Faizullin. On connection between the nonholonomic metric on the Heisenberg group and the Grushin metric. Sib. Math. J. 44 (2003), no. 6, 1085–1090.

[5] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyansky, R.V. Gamkrelidze and E.F. Mishchenko. The Mathematical Theory of Optimal Processes. Wiley Interscience, New York, 1962.

[6] G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich. Free algebras and noncommutative power series in the analysis of nonlinear control systems: an application to approximation problems, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 504, 2014, 1–88.